

DIFFÉOLOGIE DU FIBRÉ D'HOLONOMIE D'UNE CONNEXION EN DIMENSION INFINIE

JEAN-PIERRE MAGNOT

Présenté par François Lalonde, FRSC

RÉSUMÉ. On montre que le groupe et le fibré d'holonomie d'une connexion sur un fibré principal de dimension infinie dont le groupe de Lie est régulier possèdent une difféologie naturelle.

ABSTRACT. We show that the holonomy group and the holonomy bundle of a connection on an infinite dimensional principal bundle with regular structure group can be equipped with a natural diffeology.

Introduction. Le but de cette note est de préciser la structure difféologique du groupe d'holonomie d'une connexion sur un fibré principal dont le groupe de structure est régulier. En effet, dans [4], le groupe d'holonomie \mathcal{H} est construit. Mais, comme on ne sait pas montrer, à l'heure actuelle, dans quels cas \mathcal{H} est un groupe de Lie, ses propriétés en terme de différentiabilité ne sont pas mentionnées. Dans [6], il est montré comment on peut construire un autre groupe, H^{red} , qui contient \mathcal{H} , qui peut être aussi appelé groupe d'holonomie, et pour lequel on dispose d'un théorème d'Ambrose et Singer : l'algèbre de Lie de H^{red} est générée par les éléments de courbure.

Il n'est pas question ici du groupe d'holonomie H^{red} , mais de \mathcal{H} , qui est défini à l'aide des relèvements horizontaux des chemins et qui est contenu dans H^{red} . Ce n'est pas *a priori* un groupe de Lie, mais c'est un invariant de la connexion. De plus, le groupe \mathcal{H} peut être défini dès que le groupe de structure de P est régulier, alors que l'on ne sait pas définir le groupe H^{red} pour une classe si générale d'exemples. Par exemple, on ne sait pas définir H^{red} , alors que l'on peut définir \mathcal{H} , lorsque G est un groupe de difféomorphismes sur une variété compacte. Le but de cette note n'est pas de développer de nouveaux résultats sur les connexions des fibrés principaux difféologiques, mais de montrer que \mathcal{H} et $P\mathcal{H}$ ont une structure d'espace difféologique.

La notion d'espace difféologique est due à Souriau. Certains travaux de Souriau, Dazort, Donato et Iglesias (voir par exemple [1], [3], [7] pour les propriétés relatives à cette note) développent les propriétés des espaces difféologiques. La notion de connexion sur des espaces difféologique a déjà été étudiée dans [3]. Plus récemment, Leslie reprit et reformula certains des résultats des publications des auteurs précédents dans [5]. Les résultats sur les espaces difféologiques utiles à cette note sont rappelés dans le paragraphe 1.

Reçu le 13 mai, 2004 ; revu et corrigé le 2 décembre, 2005 .

Classification (de l'AMS): 58B99, 53C29.

Mots clés: holonomie, difféologie, espaces de Frölicher.

© Société royale du Canada 2006.

Ensuite, il est nécessaire de faire le lien entre espaces de Frölicher et espaces difféologiques dans le paragraphe 2. Les espaces de Frölicher ont été développés par Frölicher et Kriegl dans [2]. La comparaison entre les notions d'espace de Frölicher et de variété différentiable se trouve dans le livre de Kriegl et Michor [4]. Dans ce paragraphe, on montre que tout espace de Frölicher possède une structure difféologique sous-jacente, et que toute fonction différentiable au sens de Frölicher est différentiable au sens difféologique.

Enfin, on applique les résultats des deux paragraphes précédents pour l'étude de la difféologie du fibré d'holonomie $P\mathcal{H}$ d'une connexion d'un fibré principal P dont le groupe de structure est un groupe de Lie régulier. Pour une introduction à la notion d'holonomie moins succincte que celle de cette note, on peut citer comme référence [4].

1. Espaces difféologiques.

DÉFINITION 1.1. Soit X un ensemble quelconque.

- (i) Une *paramétrage* de dimension p (ou p -paramétrage) sur X est une application d'un ouvert O de \mathbb{R}^p dans X .
- (ii) Une *difféologie* sur X est un ensemble \mathcal{P} de paramétrages sur X tel que, pour tout $p \in \mathbb{N}$:
 - (a) Toute application constante $\mathbb{R}^p \rightarrow X$ est dans \mathcal{P} .
 - (b) Soit I un ensemble quelconque et soit une famille $\{f_i: O_i \rightarrow X\}_{i \in I} \subset \mathcal{P}$ de p -paramétrages possédant un prolongement commun f . Alors la restriction de f à $\bigcup_I O_i$ est dans \mathcal{P} .
 - (c) Soit f un p -paramétrage dans \mathcal{P} , définie sur l'ouvert $O \subset \mathbb{R}^p$. Soit $q \in \mathbb{N}$, O' un ouvert de \mathbb{R}^q et g une application infiniment différentiable de O' dans O . Alors, $f \circ g \in \mathcal{P}$.

Les paramétrages appartenant à une difféologie fixée s'appellent les *plaques* de la difféologie.

- (iii) Si \mathcal{P} est une difféologie sur X , le couple (X, \mathcal{P}) est appelé *espace difféologique*. Soient (X, \mathcal{P}) et (X', \mathcal{P}') deux espaces difféologiques, une application $f: X \rightarrow X'$ est *différentiable* si et seulement si $f \circ \mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$.

La composée de deux applications différentiables est une application différentiable. On peut remarquer que les difféologies sont définies sur des ensembles sans structure prérequis.

DÉFINITION 1.2. Soit (X, \mathcal{P}) et (X', \mathcal{P}') deux espaces difféologiques. On appelle *difféologie produit* sur $X \times X'$ l'ensemble $\mathcal{P} \times \mathcal{P}'$ de plaques $g: O \rightarrow X \times X'$ s'écrivant de la forme $g = f \times f'$, où $f \in \mathcal{P}$ et $f' \in \mathcal{P}'$.

On vérifie aisément que cette définition coïncide avec celle de [7].

DÉFINITION 1.3. ([7]) Soit G un groupe, muni d'une difféologie \mathcal{P} . Alors (G, \mathcal{P}) est un *groupe difféologique* si et seulement si la loi de groupe et l'inversion

sont différentiables.

PROPOSITION 1.4. ([7]) *Soit E un ensemble, (X, \mathcal{P}) un espace difféologique et f une application de X dans E . Alors il existe une unique difféologie $\mathcal{P}(f)$ sur E qui contient $f \circ \mathcal{P}$ et qui est minimale au sens de l'inclusion. Alors $\mathcal{P}(f)$ est appelée l'image directe de la difféologie sur E par f .*

On remarque que si f est surjective (f est alors appelée subduction), \mathcal{P}' est constituée de toutes les plaques qui sont des recollements de plaques de $f \circ \mathcal{P}$. Donnons la propriété suivante, qui sera très utile pour la suite.

PROPOSITION 1.5. *Soient (X, \mathcal{P}) , (X', \mathcal{P}') deux espaces difféologiques et $f: X \rightarrow E$, $f': X' \rightarrow E'$ deux applications surjectives. Soit le diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi} & X' \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ E & \xrightarrow{\varphi} & E' \end{array}$$

Alors, si $\phi: (X, \mathcal{P}) \rightarrow (X', \mathcal{P}')$ est différentiable, $\varphi: (E, \mathcal{P}(f)) \rightarrow (E', \mathcal{P}(f'))$ est différentiable.

PREUVE. Soit g une plaque de $\mathcal{P}(f)$. Alors, g est le recollement d'une famille de plaques de la forme $\{f \circ g_i\}_I$, où chaque g_i est une plaque de \mathcal{P} . Donc, la plaque $\varphi \circ g$ est le recollement de la famille de plaques $\{\varphi \circ f \circ g_i\}_I$, qui peut décrire aussi $\{f' \circ \phi \circ g_i\}_I$. Alors ϕ est différentiable, donc $\{f' \circ \phi \circ g_i\}_I$ est une famille de plaques de $\mathcal{P}(f')$. Leur recollement $\varphi \circ g$ est donc dans $\mathcal{P}(f')$. ■

2. Difféologies des espaces de Frölicher. Rappelons la définition des espaces de Frölicher.

DÉFINITION 2.1.

- (i) Un *espace de Frölicher* est un triplet $(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ où:
 - (a) \mathcal{C} est un ensemble de chemins $\mathbb{R} \rightarrow X$ (appelé ensemble des contours),
 - (b) \mathcal{F} est un ensemble d'applications $X \rightarrow \mathbb{R}$,
 - (c) Une application $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ est dans \mathcal{F} si et seulement si, pour chaque $c \in \mathcal{C}$, $f \circ c \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$;
 - (d) Un chemin $c: \mathbb{R} \rightarrow X$ est un contour si et seulement si, pour chaque $f \in \mathcal{F}$, $f \circ c \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- (ii) Soient $(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ et $(X', \mathcal{F}', \mathcal{C}')$ deux espaces de Frölicher. Une application $f: X \rightarrow X'$ est *différentiable* si et seulement si $\mathcal{F}' \circ f \circ \mathcal{C} \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

On doit d'abord mentionner que, avec les notations de la définition précédente,

$$f \text{ est différentiable} \Leftrightarrow f \circ \mathcal{C} \subset \mathcal{C}' \Leftrightarrow \mathcal{F}' \circ f \subset \mathcal{F}.$$

Comme cette propriété est déjà connue, et elle est assez élémentaire, il ne semble pas nécessaire d'en donner la preuve ici.

Toute $(C^\infty-)$ variété différentielle est un espace de Frölicher, et toute application C^∞ entre deux variétés différentiables l'est aussi au sens de Frölicher. En effet, si M est une variété différentiable, on vérifie aisément que $\mathcal{F}(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}(M) = C^\infty(\mathbb{R}, M)$ définissent la structure de Frölicher souhaitée.

Montrons maintenant comment un espace de Frölicher a une structure naturelle d'espace difféologique. Soit $(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ un espace de Frölicher. On définit

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}) = \coprod_{p \in \mathbb{N}} \left\{ f \text{ } p\text{-plaques sur } X ; \right. \\ \left. f : O \subset \mathbb{R}^n \rightarrow X \text{ est différentiable au sens de Frölicher} \right\}.$$

On vérifie aisément que $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ est une difféologie sur X , et que \mathcal{C} est l'ensemble des plaques de $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ dont le domaine est un ouvert de \mathbb{R} .

REMARQUE 2.2. Si M est une variété différentiable, la difféologie $\mathcal{P}(\mathcal{F}(M))$ est la difféologie nébuleuse de la variété.

REMARQUE 2.3. On remarque aussi que l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{R}) \circ \mathcal{C}$, où $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ est la difféologie naturelle de \mathbb{R} , définit une autre difféologie relative à la structure de Frölicher $(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$. Comme cette seconde difféologie n'est pas utilisée dans la suite, elle n'est que mentionnée par soucis de complétude de cette note.

PROPOSITION 2.4. Soient $(X, \mathcal{F}, \mathcal{C})$ et $(X', \mathcal{F}', \mathcal{C}')$ deux espaces de Frölicher. Alors, les deux propositions suivantes sont équivalentes.

- (i) $f : (X, \mathcal{F}, \mathcal{C}) \rightarrow (X', \mathcal{F}', \mathcal{C}')$ est différentiable au sens de Frölicher.
- (ii) $f : (X, \mathcal{P}(\mathcal{F})) \rightarrow (X', \mathcal{P}(\mathcal{F}'))$ est différentiable au sens des difféologies.

PREUVE. (ii) \Rightarrow (i) : Si f est différentiable au sens des difféologies, $f \circ \mathcal{P}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{P}(\mathcal{F}')$. Comme \mathcal{C} (resp. \mathcal{C}') est formé des plaques de $\mathcal{P}(\mathcal{F})$ (resp. $\mathcal{P}(\mathcal{F}')$) dont le domaine est un ouvert de \mathbb{R} , on obtient $f \circ \mathcal{C} \subset \mathcal{C}'$. Ainsi, f est différentiable au sens de Frölicher.

(i) \Rightarrow (ii) : Si f est différentiable au sens de Frölicher, $\mathcal{F}' \circ f \subset \mathcal{F}$. Soit $\varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{F})$ de domaine de définition O . Alors, $\mathcal{F}' \circ f \circ \varphi \subset \mathcal{F} \circ \varphi \subset C^\infty(O, \mathbb{R})$. Ainsi, $f \circ \varphi \in \mathcal{P}(\mathcal{F}')$, dont f est différentiable au sens des difféologies. ■

3. Groupe et fibré d'holonomie. Toutes les variétés différentielles de ce paragraphe sont séparables et modélées sur un espace vectoriel localement convexe. Soit $\pi : P \rightarrow M$ un fibré principal, de base connexe M et de groupe de structure G , que l'on suppose régulier [4]. Fixons $p \in P$, et posons $x = \pi(p)$.

Soit θ une connexion fixée sur P . Soit $\mathcal{L}(M, x) = \{\gamma \in C_s^\infty(M) ; \gamma(0) = x\}$, où C_s^∞ désigne les chemins de classe C^∞ , stationnaires aux extrémités. On peut remarquer que tout chemin peut être reparamétrisé en un chemin stationnaire aux extrémités. Cette remarque est importante car l'holonomie d'un lacet (définie plus loin) ne dépend pas de son paramétrage, et les preuves qui suivent sont plus simples à donner en travaillant sur $\mathcal{L}(M, x)$ plutôt que sur l'ensemble des chemins C^∞ par morceaux. Alors, le relèvement horizontal $H\gamma \in \mathcal{L}(P, p)$ de tout chemin $\gamma \in \mathcal{L}(M, x)$ relativement à la connexion θ , défini par l'équation

$$\pi \circ H\gamma = \gamma, \quad \theta(\partial_t H\gamma) = 0, \quad H\gamma(0) = p,$$

existe. En d'autres termes, il existe une application "relèvement horizontal" $H: \mathcal{L}(M, x) \rightarrow \mathcal{L}(P, p)$. C'est cette application qui nous permet de définir le groupe et le fibré d'holonomie (de la connexion θ). On définit l'ensemble

$$P\mathcal{H} = \{H\gamma(1) ; \gamma \in \mathcal{L}(M, x)\},$$

et on appelle *groupe d'holonomie* le groupe $\mathcal{H} = \{g \in G ; p \cdot g \in H(\mathcal{L}(M, x))\}$. Si γ est un lacet, et si $H\gamma(1) = p \cdot g$, $g \in G$ est appelé l'holonomie de γ . Il est montré, dans de nombreux ouvrages, que \mathcal{H} est un groupe (voir par exemple [4] pour un exposé récent). La structure de groupe du groupe d'holonomie est induite par celle de G , mais il est très utile de remarquer que sa structure de monoïde (associatif) sous-jacente est induite par la structure de monoïde non associatif de $\mathcal{L}_0(M, x) = \{\gamma \in \mathcal{L}(M, x) ; \gamma(1) = x\}$ via l'application H . En d'autres termes, la composition des chemins induit via l'application H la loi de \mathcal{H} . De plus, l'application "chemin inverse" induit via l'application H l'inversion dans \mathcal{H} . La structure de $P\mathcal{H}$ n'est pas précisée dans [4], c'est pourquoi il semble nécessaire de préciser clairement ses propriétés, tout d'abord d'un point de vue ensembliste et algébrique.

PROPOSITION 3.1.

(i) L'application $\pi_{\mathcal{H}}: P\mathcal{H} \subset P \rightarrow M$, qui est la restriction de π à $P\mathcal{H}$ est surjective.

(ii) L'action de G sur P se réduit à une action de \mathcal{H} sur $P\mathcal{H}$ libre et, pour tout $y \in M$, $\pi_{\mathcal{H}}^{-1}(y)$ est une orbite de \mathcal{H} .

(iii) Pour tout recouvrement ouvert $\{U_\alpha\}_\Lambda$ de M , tel que chaque ouvert U_α soit le domaine d'une carte u_α , étoilé et centré en un point x_α tel que $u_\alpha(x_\alpha) = 0$, il existe une bijection $\phi_\alpha: U_\alpha \times \mathcal{H} \rightarrow \pi_{\mathcal{H}}^{-1}(U_\alpha)$, qui est la restriction d'une trivialisations locale $\Phi_\alpha: U_\alpha \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$. De plus, les fonctions de transition $\tau_{\alpha,\beta}: U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow G$ associées au système de trivialisations locales $\{\Phi_\alpha\}_\Lambda$ sont à valeurs dans \mathcal{H} .

C'est pour ces raisons que $P\mathcal{H}$ est appelé *fibré d'holonomie*.

PREUVE.

- Soit $y \in M$. La base M est connexe donc il existe un chemin $\gamma \in \mathcal{L}(M, x)$ tel que $\gamma(1) = y$. Alors, $z = H\gamma(y) \in P\mathcal{H}$ et $\pi(z) = y$. L'application $\pi_{\mathcal{H}}$ est bien surjective.
- La composition des chemins $\vee: \gamma, \delta \mapsto \gamma \vee \delta$ se réduit à une application de $\mathcal{L}(M, x) \times \mathcal{L}_0(M, x)$ dans $\mathcal{L}(M, x)$. Par ce qui précède, soit $y \in P\mathcal{H}$ et $g \in \mathcal{H}$, il existe $\gamma \in \mathcal{L}(M, x)$ et $\delta \in \mathcal{L}_0(M, x)$ tels que $H\gamma(1) = y$ et $H\delta(1) = p \cdot g$, et l'on a $y \cdot g = H(\gamma \vee \delta)(1) \in P\mathcal{H}$. Il reste à montrer que $\pi_{\mathcal{H}}^{-1}(y)$ est l'orbite de \mathcal{H} pour tout $y \in M$. Soit $y \in M$ et $p', p'' \in \pi_{\mathcal{H}}^{-1}(y)$. Alors, il existe deux chemins γ' et γ'' joignant y tels que $H\gamma'(1) = p'$ et $H\gamma''(1) = p''$. Alors, $p'' = H\gamma''(1) = H((\gamma' \vee (\gamma')^{-1}) \vee \gamma'')(1) = H(\gamma' \vee ((\gamma')^{-1} \vee \gamma''))(1)$ car les chemins $(\gamma' \vee (\gamma')^{-1}) \vee \gamma''$ et $\gamma' \vee ((\gamma')^{-1} \vee \gamma'')$ sont les mêmes à une reparamétrisation près. En posant $g = H((\gamma')^{-1} \vee \gamma'')(1)$, on obtient que $p'' = p' \cdot g$.
- Posons $\alpha \in \Lambda$. M est connexe donc il existe un chemin $\gamma_{\alpha} \in \mathcal{L}(M, x)$ tel que $\gamma_{\alpha}(1) = x_{\alpha}$. Soit $p_{\alpha} = H\gamma_{\alpha}(1) \in \pi_{\mathcal{H}}^{-1}(x_{\alpha})$. On définit, pour tout $y \in U_{\alpha}$, $c_y(t) = u_{\alpha}^{-1}(tu_{\alpha}(y))$ et $h_y(t)$ le relèvement horizontal d'une reparamétrisation de c_y stationnaire aux extrémités, avec comme donnée initiale p_{α} . On pose $\varphi_{\alpha}(y) = H_y(1)$ et $\Phi_{\alpha}(y, g) = \varphi_{\alpha}(y) \cdot g$. Alors $\Phi_{\alpha}: U_{\alpha} \times G \rightarrow \pi^{-1}(U_{\alpha})$ définit bien une trivialisatation locale de P , et on a $\varphi_{\alpha}(y) = H(h_y \vee \gamma_{\alpha})(1) \in P\mathcal{H}$. Ainsi, la restriction Φ_{α} à $U_{\alpha} \times \mathcal{H}$, que l'on note aussi Φ_{α} , définit bien une bijection avec $\pi_{\mathcal{H}}^{-1}(U_{\alpha})$. ■

Toutes les définitions de \mathcal{H} et de $P\mathcal{H}$ ont jusque là été faites dans un cadre ensembliste et algébrique. Il n'a pour l'instant pas été question de définir une topologie ou une difféologie sur \mathcal{H} ou $P\mathcal{H}$. La topologie et la difféologie que nous allons définir sur \mathcal{H} ne dépendent que de la connexion, de la topologie et de la difféologie de $\mathcal{L}_0(M, x) = \{\gamma \in \mathcal{L}(M, x); \gamma(1) = x\}$. La difféologie de $\mathcal{L}_0(M, x)$ est notée $\mathcal{P}(\mathcal{L})$. C'est la difféologie associée à la structure de Frölicher de $\mathcal{L}(M, x)$ décrite dans [4].

PROPOSITION 3.2. *La topologie (resp. la difféologie) finale induite sur \mathcal{H} par l'application $H: \mathcal{L}_0(M, x) \rightarrow \mathcal{H}$ donne à \mathcal{H} une structure de groupe topologique (resp. difféologique).*

La preuve des deux parties de cette proposition tient en ces quelques remarques:

- $\mathcal{L}_0(M, x)$ est un monoïde dont la loi de composition \vee est différentiable au sens de Frölicher et donc aussi au sens des difféologies associées (voir paragraphe 2); cette loi induit la loi de composition du groupe \mathcal{H} .
- De même, l'application "chemin inverse", qui est continue et différentiable, induit l'inversion sur \mathcal{H} .

Donnons maintenant la structure d'espace difféologique de $P\mathcal{H}$, et donnons de manière explicite les plaques de sa difféologie. Pour ceci, on munit $P\mathcal{H}$ de la

topologie finale induite par $\mathcal{L}(M, x)$ via H .

PROPOSITION 3.3. *On munit $P\mathcal{H}$ de la difféologie $\mathcal{P}(H)$ induite par $(\mathcal{L}(M, x), \mathcal{P}(\mathcal{L}))$ via H . Alors,*

- (i) *l'action à droite $P\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est différentiable,*
- (ii) *$\pi_{\mathcal{H}}$ est différentiable,*
- (iii) *f est dans \mathcal{P} si et seulement si pour toute trivialisation locale $\Phi_{\alpha}: U_{\alpha} \times \mathcal{H} \rightarrow \pi_{\mathcal{H}}^{-1}(U_{\alpha})$, $\Phi_{\alpha}^{-1} \circ f|_{\pi_{\mathcal{H}}^{-1}(U_{\alpha})}$ est une plaque pour la difféologie produit sur $U_{\alpha} \times \mathcal{H}$,*
- (iv) *les changements de trivialisation locales $\tau_{\alpha, \beta}: U_{\alpha} \cap U_{\beta} \rightarrow \mathcal{H}$ sont différentiables.*

PREUVE. (i) et (ii) : L'action à droite $P\mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ et $\pi_{\mathcal{H}}$ sont respectivement les images via l'application H de la composition à droite des chemins $\mathcal{L}(M, x) \times \mathcal{L}_0(M, x) \rightarrow \mathcal{L}(M, x)$ et de l'application $fin: \gamma \in \mathcal{L}(M, x) \mapsto \gamma(1)$, qui sont différentiables au sens de Frölicher et donc au sens des difféologies.

(iii) :

- Soit $f \in \mathcal{P}(H)$ et soit $O_{\alpha} = f^{-1}(\pi_{\mathcal{H}}^{-1}(U_{\alpha}))$. Alors $f: O \rightarrow P\mathcal{H}$ est une plaque de $\mathcal{P}(H)$ si et seulement si il existe une famille de plaques $g_i: O_i \rightarrow \mathcal{L}(M, x)$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{L})$ telle que f est le recollement de la famille $\{H \circ g_i\}_I$. Alors, $O_{i, \alpha} = g_i^{-1}(fin^{-1}(U_{\alpha}))$. Comme l'application fin est continue, $O_{i, \alpha}$ est un ouvert contenu dans O , donc $f|_{\pi_{\mathcal{H}}^{-1}(U_{\alpha})}$, qui est le recollement des plaques $g_i|_{O_{i, \alpha}}$, est une plaque de $\mathcal{P}(H)$. Comme \mathcal{P} est une difféologie, on a aussi la réciproque : si une fonction $f: O \rightarrow P\mathcal{H}$ est telle que, pour tout α , $f|_{\pi_{\mathcal{H}}^{-1}(U_{\alpha})} \in \mathcal{P}(H)$, alors $f \in \mathcal{P}(H)$.
- Soit \mathcal{P}_{α} l'ensemble des plaques de \mathcal{P} à valeurs dans $\pi_{\mathcal{H}}^{-1}(U_{\alpha})$. Alors \mathcal{P}_{α} est une difféologie sur $\pi_{\mathcal{H}}^{-1}(U_{\alpha})$. Alors, en reprenant les notations utilisées dans la preuve de la proposition 3.1, on voit que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} U_{\alpha} \times \mathcal{L}_0(M, x) & \xrightarrow{A_{\alpha}} & fin^{-1}(U_{\alpha}) \\ \text{Id} \times H \downarrow & & \downarrow H \\ U_{\alpha} \times \mathcal{H} & \xrightarrow{\Phi_{\alpha}} & \pi_{\mathcal{H}}^{-1}(U_{\alpha}) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} fin^{-1}(U_{\alpha}) & \xrightarrow{B_{\alpha}} & fin^{-1}(U_{\alpha}) \times \mathcal{L}(M, x) \\ H \downarrow & & \downarrow fin \times H \\ \pi_{\mathcal{H}}^{-1}(U_{\alpha}) & \xrightarrow{\Phi_{\alpha}^{-1}} & U_{\alpha} \times \mathcal{H} \end{array}$$

sont commutatifs, où

$$A_\alpha : (y, \delta) \mapsto (h_y \vee \gamma_\alpha) \vee (\delta) \quad \text{et} \quad B_\alpha : \gamma \mapsto (\gamma, (\gamma_\alpha^{-1} \vee h_{\text{fin}(\gamma)}^{-1}) \vee \gamma).$$

Donc, Φ_α et Φ_α^{-1} sont différentiables, ce qui achève la preuve.

(iv) On a, pour $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, $\tau_{\alpha,\beta}(x) = p_2 \circ \Phi_\beta^{-1} \circ \phi_\alpha(x) = p_2 \circ \Phi_\beta^{-1} \circ \Phi_\alpha(x, e)$, où p_2 est la projection sur la deuxième composante $U_\beta \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$. Les applications p_2 , Φ_β^{-1} et ϕ_α sont différentiables, donc $\tau_{\alpha,\beta}$ est différentiable. ■

REMERCIEMENTS. La première version de cette note a été rédigée lors d'une bourse post-doctorale Lavoisier, sur l'invitation de Sergio Albeverio. J'aimerais aussi remercier Horst Thaler qui m'a honoré de son amitié et qui m'a aidé à appréhender certains problèmes mathématiques liés à la physique. Les maintes discussions que j'ai pu avoir avec lui ont beaucoup influencé la présentation de cette note. Enfin, j'aimerais remercier l'arbitre anonyme de la première version de cette note pour sa lecture scrupuleuse du texte alors proposé, et pour ses remarques claires et précises.

RÉFÉRENCES

1. P. Donato, *Revêtements de groupes différentiels*. Thèse de doctorat d'état, Université de Provence, Marseille (1984).
2. A. Frölicher et A. Kriegl, *Linear spaces and differentiation theory*. Wiley Interscience, Chichester, 1988.
3. P. Iglésias, *Connexions et difféologie*. Dans: Aspects dynamiques et topologiques des groupes infinis de transformation de la mécanique. Travaux en cours 25, Hermann, Paris, 1987, pp. 61–78.
4. A. Kriegl et P. W. Michor, *The convenient setting for global analysis*. Mathematical Surveys and Monographs 53, American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
5. J. Leslie, *On a diffeological group realization of certain generalized symmetrizable Kac-Moody Lie algebras*. J. Lie Theory **13** (2003), no. 2, 427–442.
6. J.-P. Magnot, *Structure groups and holonomy in infinite dimensions*. Bull. Sci. Math. **128** (2004), no. 6, 513–529.
7. J.-M. Souriau, *Un algorithme générateur de structures quantiques*. Astérisque Numero Hors Série, 1985, 341–399 .

*Institut für Angewandte Mathematik
Abt. f. Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik
Wegelerstr. 6
D-53115 Bonn
Allemagne*
et
*29 rue Eugène Gilbert
63000 Clermont-Ferrand
France*
email: jean-pierre.magnot@libertysurf.fr