

UNE OBSTRUCTION TOPOLOGIQUE AUX FIBRÉS TANGENTS UNITÉS

ABDOL-REZA MANSOURI

Présenté par Niky Kamran, FRSC

RÉSUMÉ. Dans cette note, nous présentons des conditions nécessaires à ce qu'une variété lisse de dimension impaire soit le fibré tangent unité d'une autre variété lisse pour une métrique riemannienne quelconque. Ces conditions se traduisent par l'annulation de certaines classes de Stiefel–Whitney de la variété.

ABSTRACT. In this note, we present necessary conditions for a given odd-dimensional smooth manifold to be the unit tangent bundle of another smooth manifold for an arbitrary Riemannian metric. These conditions manifest themselves in the vanishing of certain Stiefel–Whitney classes of the manifold.

1. Introduction. Soit P une variété réelle lisse de dimension $2n - 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Nous nous intéressons aux obstructions topologiques à l'existence d'une variété riemannienne (M, g) de dimension n telle que P soit le fibré tangent unité de M , c'est-à-dire le fibré en sphères de base M constitué de tous les vecteurs tangents $v \in TM$ satisfaisant à $g(v, v) = 1$. Cette question est d'intérêt dans la théorie des systèmes dynamiques et plus précisément dans le cadre de l'étude des flots hamiltoniens. Il est bien connu que tout flot géodésique est hamiltonien; l'inverse par contre n'est pas vrai et une condition nécessaire à ce qu'un flot hamiltonien sur une variété P soit un flot géodésique est que cette variété soit le fibré tangent unité d'une variété riemannienne (M, g) . Dans un travail récent, mettant à profit la suite exacte de Gysin en homologie, McCord *et al.* [2] ont obtenu des conditions nécessaires sur l'homologie de P à ce que celle-ci puisse être un fibré en sphères ayant pour base une variété de dimension n . Dans le cas particulier où P est une variété compacte, connexe et orientable, et dénotant la k -ième nombre de Betti de P par β_k , leur résultat principal est le suivant:

THÉORÈME 1.1. *Soit P une variété compacte, connexe et orientable de dimension $2n - 1$ avec $n > 2$. Si le sous-groupe de torsion $T_{n-1}(P)$ de $H_{n-1}(P; \mathbb{Z})$ est cyclique ou trivial, alors une condition nécessaire à ce que P soit le fibré*

Reçu le 14 novembre, 2007.

Cette recherche a été subventionnée en partie par le Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie du Canada.

Classification (de l'AMS): 55R25, 57R22, 57R20.

Mots clés: obstructions topologiques, fibré tangent unité, classes de Stiefel–Whitney.

© Société royale du Canada 2007.

tangent unité d'une variété riemannienne (M, g) orientable de dimension n est donnée par:

- (i) $\beta_{2n-1} = 1$;
- (ii) $\beta_k = \beta_{k+n-1}, \forall 2 \leq k \leq n-2$;
- (iii) $0 \leq \beta_{n-1} - \beta_{2n-2} = \beta_n - \beta_1 \leq 1$;
- (iv) Si le sous-groupe de torsion $T_{n-1}(P)$ de $H_{n-1}(P; \mathbb{Z})$ est non-trivial, alors

$$\left| \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \beta_i + (-1)^n (1 - \beta_{2n-2}) \right| = |T_{n-1}(P)|;$$

si $T_{n-1}(P) = \{0\}$, alors

$$\left| \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \beta_i + (-1)^n (1 - \beta_{2n-2}) \right| + \beta_n - \beta_1 = 1.$$

Des conditions nécessaires similaires reliant les nombres de Betti de la variété P ainsi que ses sous-groupes de torsion sont obtenues même dans les cas où P n'est ni compacte, ni orientable. Il est à signaler que les conditions nécessaires obtenues dans [2], incluant le théorème 1.1, définissent des obstructions topologiques à ce que la variété $2n-1$ -dimensionnelle P soit un fibré en sphères ayant pour base une variété n -dimensionnelle M , et non à ce que P soit le fibré tangent unité de M ; or, si un fibré tangent unité est évidemment un fibré en sphères, l'inverse n'est pas toujours vrai, le groupe structural d'un fibré en sphères de base n -dimensionnelle et de fibre type la sphère S^{n-1} , qui est le groupe des difféomorphismes de S^{n-1} , n'étant pas toujours réductible au groupe orthogonal [1].

Dans ce travail, nous présentons des conditions topologiques nécessaires à ce qu'une variété réelle lisse de dimension $2n-1$ ($n \in \mathbb{N}^*$) soit le fibré tangent unité d'une variété riemannienne quelconque (M, g) . Ces conditions se traduisent par l'annulation de certaines classes de Stiefel-Whitney du fibré tangent TP de P , et nous montrons sur l'exemple de l'espace projectif réel, que les conditions que nous obtenons ne se déduisent pas de celles de [2].

2. Contraintes topologiques. Soit (M, g) une variété riemannienne réelle lisse de dimension n . Le fibré tangent unité SM de M est défini comme étant le sous-ensemble de TM constitué de tous les vecteurs tangents $v \in TM$ tels que $g(v, v) = 1$. TM étant une variété orientable de dimension $2n$, il en découle que SM est une sous-variété orientable de TM de codimension 1. Soit $i: SM \hookrightarrow TM$ l'injection canonique, et soit ν_{SM} le fibré normal de SM dans TM . La suite exacte courte de fibrés vectoriels de base SM

$$0 \rightarrow T(SM) \rightarrow i^*(T(TM)) \rightarrow \nu_{SM} \rightarrow 0$$

est scindée, ce qui donne $i^*(T(TM)) \simeq T(SM) \oplus \nu_{SM}$. En dénotant par $w(\xi)$ la classe de Stiefel–Whitney totale du fibré vectoriel réel ξ , nous obtenons

$$w(T(SM))w(\nu_{SM}) = i^*(w(T(TM))),$$

et comme SM est une sous-variété orientable de codimension 1 de la variété orientable TM , le fibré normal ν_{SM} est trivial, ce qui donne $w(T(SM)) = i^*(w(T(TM)))$. Soit maintenant $\pi: TM \rightarrow M$ la projection canonique du fibré tangent de M , et soit VM le fibré vertical de TM , c'est-à-dire le noyau $\ker(T\pi)$ de l'application tangente de π . VM est le sous-fibré vectoriel de $T(TM)$ constitué des vecteurs tangents aux fibres de TM . La suite exacte courte de fibrés vectoriels de base TM

$$0 \rightarrow VM \rightarrow T(TM) \rightarrow \pi^*(TM) \rightarrow 0$$

est scindée, ce qui donne $T(TM) \simeq VM \oplus \pi^*(TM)$. De plus, l'isomorphisme canonique $T_v(T_pM) \simeq T_pM$ pour tout point $p \in M$ et tout vecteur tangent $v \in T_pM$ induit un isomorphisme canonique $VM \simeq \pi^*(TM)$. Nous en déduisons $T(TM) \simeq \pi^*(TM) \oplus \pi^*(TM)$, ce qui donne $w(T(TM)) = (w(\pi^*(TM)))^2 = \pi^*((w(TM))^2)$. Nous obtenons en conclusion $w(T(SM)) = (\pi \circ i)^*((w(TM))^2)$. En écrivant la classe de Stiefel–Whitney totale $w(TM)$ du fibré tangent TM tel $w(TM) = 1 + w_1(TM) + w_2(TM) + \dots + w_n(TM)$, où $w_k(TM) \in H^k(M; \mathbb{Z}_2)$ pour tout k , il en ressort clairement que les termes de degré impair de $(w(TM))^2$ sont tous nuls; de plus, M étant de dimension n , l'anneau de cohomologie $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ s'annule en degrés $> n$. Nous obtenons donc le résultat suivant:

THÉORÈME 2.1. *Soit P une variété lisse de dimension $2n - 1$. S'il existe une variété riemannienne (M, g) de dimension n pour laquelle P est le fibré tangent unité, alors les classes de Stiefel–Whitney $w_i(TP) \in H^i(P; \mathbb{Z}_2)$ du fibré tangent de P sont nulles pour tout $i > n$ et pour tout i impair.*

De même, l'anneau de cohomologie $H^*(M; \mathbb{R})$ s'annulant en degrés $> n$, nous obtenons par une démarche similaire le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. *Soit P une variété lisse de dimension $2n - 1$. S'il existe une variété riemannienne (M, g) de dimension n pour laquelle P est le fibré tangent unité, alors les classes de Pontrjagin réelles $p_i(TP) \in H^{4i}(P; \mathbb{R})$ du fibré tangent de P sont nulles pour tout $i > n/4$.*

3. Exemple. Nous montrons sur un exemple que la condition nécessaire énoncée dans le théorème 2.1 ne se déduit pas des conditions nécessaires homologiques du théorème 1.1. Ceci peut être attribué au fait que le théorème 2.1 met à profit la structure d'anneau de la cohomologie de la variété, ce qui échappe aux considérations purement homologiques qui sont à la base du théorème 1.1; de plus, comme il a été mentionné précédemment, le théorème 1.1 se situe dans l'éventail plus large des fibrés en sphères et non des fibrés tangents unités.

Soit donc $\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}$ l'espace projectif réel de dimension $2n - 1 = 11$, c'est-à-dire correspondant à $n = 6$; $\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}$ est une variété compacte, connexe et orientable, et ses groupes d'homologie sont donnés par $H_0(\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}; \mathbb{Z}) \simeq H_{11}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $H_m(\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$ pour $0 < m < 11$ avec m impair, et $H_m(\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}; \mathbb{Z}) = 0$ pour $0 < m < 11$ avec m pair. Le sous-groupe de torsion $T_5(\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}) \simeq \mathbb{Z}_2$ de $H_5(\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}, \mathbb{Z})$ est d'ordre 2, et l'on a:

$$\left| \sum_{i=0}^{n-2} (-1)^i \beta_i + (-1)^n (1 - \beta_{2n-2}) \right| = 2;$$

de plus, $\beta_0 = \beta_{11} = 1$, et les conditions (ii) et (iii) du théorème 1.1 sont immédiatement vérifiées vu que les nombres de Betti concernés sont tous nuls. L'espace projectif réel $\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}$ satisfait donc à toutes les conditions nécessaires du théorème 1.1. Cependant, la 8-ième classe de Stiefel–Whitney $w_8(\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}) \in H^8(\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}; \mathbb{Z}_2)$ du fibré tangent de $\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}$ est égale à x^8 , où x est le générateur de $H^*(\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}; \mathbb{Z}_2)$, satisfaisant à l'unique relation $x^{12} = 0$ [3]. On en déduit que $w_8(\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}) \neq 0$, ce qui implique, d'après le théorème 2.1, que $\mathbb{R}\mathbb{P}^{11}$ ne peut être le fibré tangent unité d'une autre variété.

Il est clair aussi que les conditions nécessaires établies au théorème 1.1 ne se déduisent pas de celles établies au théorème 2.1; il suffit pour cela de considérer la sphère S^{2n-1} avec n impair.

RÉFÉRENCES

1. R. Bott and L. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*. Graduate Texts in Mathematics **82**, Springer–Verlag, New York–Berlin, 1982.
2. C. McCord, K. Meyer and D. Offin, *Are Hamiltonian Flows Geodesic Flows?* Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 1237–1250.
3. J. Milnor and J. D. Stasheff, *Characteristic Classes*. Princeton University Press, NJ, 1974.

Department of Mathematics and Statistics
Queen's University
Kingston, ON
K7L 3N6
email: mansouri@mast.queensu.ca